2024 阿里巴巴全球数学竞赛

问题1

几位同学假期组成一个小组去某市旅游. 该市有6座塔，它们的位置分别为A, B, C, D, E, F. 同学们自由行动一段时间后，每位同学都发现，自己在所在的位置只能看到位于A, B, C, D处的四座塔，而看不到位于E 和F 的塔. 已知

(1) 同学们的位置和塔的位置均视为同一平面上的点，且这些点彼此不重合；

(2) A, B, C, D, E, F 中任意3点不共线；

(3) 看不到塔的唯一可能就是视线被其它的塔所阻挡，例如，如果某位同学所在的位置P 和A, B 共线，且A 在线段PB 上，那么该同学就看不到位于B 处的塔.

请问，这个旅游小组最多可能有多少名同学？

(A) 3　(B) 4　(C) 6　(D) 12

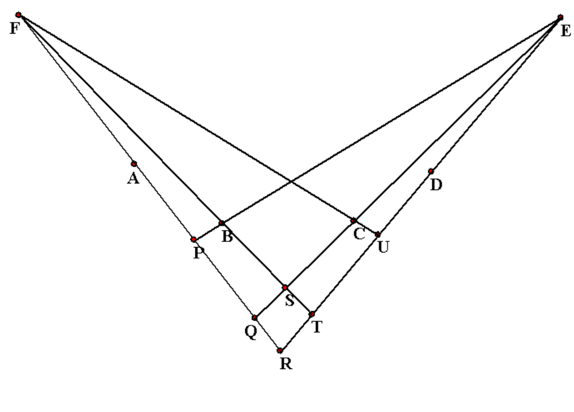
答案1

(C). 由于任意三座塔的位置不共线，所以对任意一位同学来说，E 和F 处的塔必然是被两座不同的塔所阻挡了视线.

我们任取前面的2座塔（不妨设为A 处和B 处的塔），假设一位同学的视线是被这2座塔阻挡，那么该同学的位置或者是EA 的延长线和FB 的延长线的交点，或者是EB 的延长线和FA 的延长线的交点.

然而，如果EA 的延长线和FB 的延长线有交点，那么$AEFB$ 是一个凸四边形，这意味着EB 和FA 的交点在这两条线段的内部. 因此，被A 处和B 处的塔阻挡住视线的同学最多有一位.

由于在前4座塔中选取2座塔的方式有6种，所以同学的数目不超过6. 下图是一个取到6的例子（P, Q, R, S, T, U 是同学们的位置）.



问题2

小明玩战机游戏。初始积分为2。在游戏进行中，积分会随着时间线性地连续减少(速率为每单位时间段扣除1)。游戏开始后，每隔一个随机时间段(时长为互相独立的参数为1 的指数分布)，就会有一架敌机出现在屏幕上。当敌机出现时，小明立即进行操作，可以瞬间击落对方，或者瞬间被对方击落。如被敌机击落，则游戏结束。如小明击落敌机，则会获得1.5个积分，并且可以选择在击落该次敌机后立即退出游戏，或者继续游戏。如选择继续游戏，则须等待到下一架敌机出现，中途不能主动退出。游戏的难度不断递增：出现的第n 架敌机，小明击落对方的概率为$(0.85)^n$，被击落的概率为$1-(0.85)^n$，且与之前的事件独立。在任何时刻，如果积分降到0，则游戏自动结束。

问题部分：

(1) 如果游戏中，小明被击落后，其之前的积分保持。那么为了游戏结束时的累积积分的数学期望最大化，小明应该在其击落第几架敌机后主动结束游戏？

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

(2) 假设游戏中，小明被击落后，其之前积累的积分会清零。那么为了结束时的期望积分最大化，小明也会选择一个最优的时间主动结束游戏。请问在游戏结束时(小明主动结束、或积分减到0)，下列哪一个选项最接近游戏结束时小明的期望积分？

(A) 2.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 8.

答案2

敌机的出现是一个参数为1 的泊松点过程(如需避免连续时间随机过程，这里也可用指数分布的无记忆性)。在任意时刻，每进行一个单位时间段，小明减少的积分为1。在击落每架敌机后，小明增加的积分为1.5。在这之后，每进行一个单位时间段，小明击落敌机的期望收益为$1.5\times(0.85)^n$。

(1) 在这种情况下，被敌机击落的期望损失为0。那么我们选择最大的n，使得$1.5\times(0.85)^n>1$，即$n=2$。小明在击落第2 架敌机时主动结束游戏。因此选(B).

(2) 假设击落第$n-1$ 架敌机后，小明所拥有的积分为t。如选择继续等待到下一架敌机出现后结束游戏，积分的数学期望为

$$(0.85)^n \times \int_0^t \big(t + 1.5 - x\big) e^{-x} \mathrm{d}x = (0.85)^n \times \big(t + 0.5 \times (1 - e^{-t})\big)\ . \tag{1}$$

当$n = 1$ 且$t \leq 2$ 时，上式总是大于t。因此小明至少要等到第一架敌机出现。假如小明击落了第一架敌机，那么其手中积分至少为1.5。当$n = 2$ 且$t \geq 1.5$ 时，(1) 总是小于t。因此，假设小明已经击落了第一架敌机，那么选择“立即结束游戏” 总是优于“击落第二架敌机后立即结束”。由第一问可知，无论小明现有积分为多少，其最优结束时间都应该不晚于击落第二架敌机。综上可得，小明的最优策略为：等待第一架敌机出现，将其击落后立即结束游戏。

在此策略下，小明最终积分的期望应为(1) 式在$n = 1$ 及$t = 2$ 时的值，约为2.067. 最接近的选项为(A).

问题3

对于实数$T > 0$, 称欧氏平面$\mathbb{R}^2$的子集Γ为T-稠密的, 如果对任意$v \in \mathbb{R}^2$, 存在$w \in \Gamma$满足$\|v-w\| \leqslant T$. 设2阶整方阵$A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$满足$\det(A) \neq 0$.

(1) 假设$\mathrm{tr}(A)=0$. 证明存在$C>0$, 使得对任意正整数n, 集合

$$A^n\mathbb{Z}^2 := \{A^n v : v \in \mathbb{Z}^2\}$$

是$C|\det(A)|^{n/2}$-稠密的.

(2) 假设A的特征多项式在有理数域上不可约. 证明与(1)相同的结论.

注：这里$\mathbb{R}^2$和$\mathbb{Z}^2$中的向量约定为列向量, $\mathbb{R}^2$中的内积为标准内积, 即$\langle v,w\rangle = v^t w$.

（提示: 在对(2)的证明中, 可使用如下Minkowski凸体定理的特殊情形：$\mathbb{R}^2$中以原点为中心且面积为4的任意闭平行四边形中总包含$\mathbb{Z}^2$中的非零向量.）

答案3

记$t=\mathrm{tr}(A)$, $d=\det(A)$. 则A的特征多项式$\chi_A(\lambda)=\lambda^2-t\lambda+d$. 由Cayley–Hamilton定理, $\chi_A(A)=0$, 即$A^2=tA-dI_2$. 下面分两步证明.

第一步. 先证明: 在(1)或(2)的条件下, 对任意正整数n, 存在不全为零的整数p_n,q_n和区间$[-1,1]$中的实数x_n,y_n, 使得

$$p_nA^{n+1}+q_nA^n = |d|^{n/2}(x_nA+y_nI_2), \tag{2}$$

并且(2)式两边为可逆矩阵.

- 假设(1)的条件成立, 即$t=0$. 则$A^2=-dI_2$.
  - 若n为偶数, 则$A^n=(-d)^{n/2}I_2$, 即(2)式对$p_n=0, q_n=1, x_n=0, y_n=\mathrm{sgn}((-d)^{n/2})$成立. 此时(2)式两边可逆.
  - 若n为奇数, 则$A^n=(-d)^{(n-1)/2}A$, 即(2)式对$p_n=0, q_n=1, x_n=\mathrm{sgn}((-d)^{(n-1)/2})|d|^{-1/2}$, $y_n=0$ 成立. 此时(2)式两边也可逆.
- 假设(2)的条件成立, 即$\chi_A(\lambda)$在$\mathbb{Q}$上不可约. 由$A^2=tA-dI_2$可知, 对任意$n\geqslant 0$, 存在$a_n,b_n\in\mathbb{R}$使得$A^n=a_nA+b_nI_2$, 并且由于A与I_2线性无关, a_n与b_n被n唯一决定. 为了得到进一步的信息, 注意到

$$a_{n+1}A+b_{n+1}I_2 = A^{n+1} = A(a_nA+b_nI_2) = a_n(tA-dI_2)+b_nA = (ta_n+b_n)A-da_nI_2.$$

这推出$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. 从而对$n \geqslant 1$有

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -d & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -d & 0 \end{pmatrix}^n.$$

特别地, $\det \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix} = d^n$. 考虑以原点为中心的闭平行四边形

$$\Delta_n := \left\{ |d|^{n/2} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in [-1, 1] \right\}.$$

由于矩阵$|d|^{n/2} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix}^{-1}$的行列式为$\pm 1$, 所以$\Delta_n$的面积为4. 由Minkowski凸体定理, Δ_n中存在非零整点, 即存在$x_n, y_n \in [-1, 1]$和不全为零的$p_n, q_n \in \mathbb{Z}$使得

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = |d|^{n/2} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

这推出

$$\begin{aligned} p_n A^{n+1} + q_n A^n &= p_n(a_{n+1} A + b_{n+1} I_2) + q_n(a_n A + b_n I_2) \\ &= (p_n a_{n+1} + q_n a_n) A + (p_n b_{n+1} + q_n b_n) I_2 \\ &= |d|^{n/2} (x_n A + y_n I_2), \end{aligned}$$

即(2)式成立. 另外, 由于$\chi_A(\lambda)$在$\mathbb{Q}$上不可约, 所以A在$\mathbb{Q}$中无特征值. 这推出$p_n A + q_n I_2$可逆, 从而(2)式两边的矩阵可逆.

第二步. 设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. 我们证明

$$C := \Big((|a_{11}| + 1)^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + (|a_{22}| + 1)^2 \Big)^{1/2}$$

满足要求. 首先, 容易验证, 对任意$x, y \in [-1, 1]$和$u \in \mathbb{R}^2$, 有$\|(xA + yI_2)u\| \leqslant C\|u\|$. 设$n \geqslant 1$, $v \in \mathbb{R}^2$. 记

$$v' = |d|^{-n/2} (x_n A + y_n I_2)^{-1} v.$$

取$w' \in \mathbb{Z}^2$使得$\|v' - w'\| \leqslant 1$, 并取

$$w = |d|^{n/2} (x_n A + y_n I_2) w' = A^n (p_n A + q_n I_2) w' \in A^n \mathbb{Z}^2.$$

则

$$\|v - w\| = |d|^{n/2} \|(x_n A + y_n I_2)(v' - w')\| \leqslant C |d|^{n/2}.$$

这就完成了证明. $\square$

问题4

设$d \geq 0$是整数, V是$2d+1$维复线性空间, 有一组基

$$\{v_1, v_2, \cdots, v_{2d+1}\}.$$

对任一整数j $(0 \leq j \leq \frac{d}{2})$, 记$U_j$是

$$v_{2j+1}, v_{2j+3}, \cdots, v_{2d-2j+1}$$

生成的子空间. 定义线性变换$f : V \to V$ 为

$$f(v_i) = \frac{(i-1)(2d+2-i)}{2} v_{i-1} + \frac{1}{2} v_{i+1},\ 1 \leq i \leq 2d+1.$$

这里我们约定$v_0 = v_{2d+2} = 0$.

(1) 证明: f的全部特征值为$-d, -d+1, \cdots, d$.

(2) 记W是从属于特征值$-d+2k$ $(0 \leq k \leq d)$的f的特征子空间的和. 求$W \cap U_0$的维数.

(3) 对任一整数j $(1 \leq j \leq \frac{d}{2})$, 求$W \cap U_j$的维数.

答案4

在$M_2(\mathbb{C})$ 中, 令

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算得

$$[h_0, x_0] = h_0 x_0 - x_0 h_0 = 2x_0,$$
$$[h_0, y_0] = h_0 y_0 - y_0 h_0 = -2y_0,$$
$$[x_0, y_0] = x_0 y_0 - y_0 x_0 = h_0.$$

记

$$T = \exp(\frac{\pi}{4}(x_0 - y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

计算得$T(x_0 + y_0)T^{-1} = h$.

(1)定义线性变换$h, x, y : V \to V$ 如下:

$$x(v_i) = v_{i+1},\ y(v_i) = (i-1)(2d+2-i)v_{i-1},\ h(v_i) = 2(i-d-1)v_i.$$

计算得
$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h.$$
定义映射$\phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ 为
$$\phi(h_0) = h,\ \phi(x_0) = x,\ \phi(y_0) = y.$$
则ϕ 是一个李代数同态. 类似于T的定义, 记$S = \exp(\frac{\pi}{4}(x - y))$, 则$S(x + y)S^{-1} = h$. 所以, $f = \frac{1}{2}(x + y)$ 与$\frac{1}{2}h$ 共轭. 这样, f 的特征值与$\frac{1}{2}h$的相同, 也是$-d, -d + 1, \cdots, d$.

(2)记$A = \exp(\pi \mathbf{i} f)$, $B = \exp(\frac{\pi \mathbf{i}}{2} h)$. 则$W$ 是属于特征值$(-1)^d$ 的A 的特征子空间, U_0 是属于特征值$(-1)^d$ 的B 的特征子空间. 以上同态ϕ 是某个李群同态$\Phi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(V)$ 的微分. 在$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 中, 我们有
$$A_0 := \exp(\pi \mathbf{i} f_0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$
及
$$B_0 := \exp(\frac{\pi}{2} \mathbf{i} h_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$
注意
$$A_0^2 = B_0^2 = A_0 B_0 A_0^{-1} B_0^{-1} = -I \text{ and } A_0 \sim B_0 \sim A_0 B_0.$$
由于$\Phi(-I) = 1$, 所以A 和B 是$\mathrm{GL}(V)$ 中交换的对合子, 且$A \sim B \sim AB$. 当d 是偶数时, 我们有
$$\dim W \cap U_0 = \frac{1}{2}(3 \dim V^A - \dim V) = \frac{1}{2}(d + 2).$$
当d 是奇数时, 我们有
$$\dim W \cap U_0 = \frac{1}{2}(\dim V - \dim V^A) = \frac{1}{2}(d + 1).$$

(3)我们有$U_{\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor} = 0$. 因此, $\dim W \cap U_{\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor} = 0$. 有以上(2)中结论, $\dim W \cap U_0 = \lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor$. 只需证明: 对任意的$j$ $(0 \le j \le \frac{d}{2})$, 我们有
$$\dim W \cap U_j - \dim W \cap U_{j+1} \le 1.$$
这样,
$$\dim W \cap U_j = \lfloor \frac{d + 2}{2} \rfloor - j.$$

由于$\mathrm{Ad}(A_0)x_0 = y_0$ 以及$\mathrm{Ad}(A_0)y_0 = x_0$, 我们得到$\mathrm{Ad}(A)x = y$ 和$\mathrm{Ad}(A)y = x$. 我们也有$\mathrm{Ad}(A_0)^{-1}h_0 = -h_0$. 因此, $\mathrm{Ad}(A)^{-1}h = -h$. 记$u_0 = v_{d+1}$, 它是$h$的0-特征子空间的生成元. 由于$\mathrm{Ad}(A)^{-1}h = -h$, 得$h(Au_0) = -A(hu_0) = 0$. 因此, Au_0 也是h的0-特征向量. 这样, $Au_0 = tu_0$, $t \ne 0$. 由于$A^2 = 1$, 必有$t = \pm 1$. 对任意$j \le \frac{d}{2}$, $v_{2d+1-2j} = x^{d+1-2j}u_0$, 而$v_{2j+1}$与$y^{d+1-2j}u_0$成比例. 这样, A的作用交换v_{2j+1}和$c_j v_{2d+1-2j}$, c_j是某个非零常数. 因此, $\dim W \cap U_j - \dim W \cap U_{j+1} \le 1$.

问题5

对于$\mathbb{R}^3$中的任何中心对称的凸多面体V, 证明可以找到一个椭球面E, 把凸多面体包在内部, 且E的表面积不超过V的表面积的3倍.

答案5

我们可以证明下述一般的结论:

(1)设V是$\mathbb{R}^3$中的一个关于原点对称的非空有界凸开集. 在所有关于原点对称且包含V的椭球面E中, 存在唯一一个E_0, 使得其包围的体积取到最小值.

我们知道, $\mathbb{R}^3$中关于原点对称椭球与3元正定二次型一一对应. 我们记三元(半)正定二次型全体为Q_+, 对于$q \in Q_+$, 它对应的(可能退化的)椭球为$\{q(x,x) \leqslant 1\}$.

注意到凸集V唯一对应到$\mathbb{R}^3$的一个范数N(这样$V = \{x, N(x) < 1\}$). 包含V的(可能退化的)椭球面E对应的三元二次型全体就是

$$K = \{q \in Q_+, 0 \leqslant q(x,x) \leqslant (N(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}^3\}.$$

我们容易看到:

- K不是空集;
- K作为$\mathbb{R}^{3\times 3}$(赋予欧氏度量决定的拓扑)中的子集是一个有界闭集, 从而是紧的;
- K是一个凸集(若$0 \leqslant q_1(x,x), q_2(x,x) \leqslant (N(x))^2$, 则对于任意$\lambda \in [0,1]$, $0 \leqslant \lambda q_1(x,x) + (1-\lambda)q_2(x,x) \leqslant (N(x))^2$).

我们记$v(q) =$ 椭球$\{q(x,x) \leqslant 1\}$的体积, 这是K上的一个连续函数(三个特征值乘积的倒数, 注意这是无上界的), 由K的紧性可知存在q_N, 使得$v(q_N)$取到最小值.

现在假设另有一个q'使得$v(q') = v(q_N)$, 我们要说明$q' = q_N$. 为此, 我们利用等式

$$\iiint e^{-q(x,x)} d^3x = \frac{3}{2} v(q) \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t} dt,$$

和指数函数的凸性, 可得

$$I(q) := \iiint e^{\frac{-q'(x,x) - q_N(x,x)}{2}} d^3x \leqslant \frac{1}{2} \left(\iiint e^{-q'(x,x)} d^3x + \iiint e^{-q_N(x,x)} d^3x \right)$$

从而存在唯一一个(对应于q_N的)E_0, 使得体积取到最小值.

(2) 我们还有$E_0 \subset \overline{\sqrt{3}V}$.

椭球面E_0上, 我们取一点使得$N(x)$达到最大值的点a. 容易看到

- 椭球面E_0在a点处的切平面Π与E_0只有一个公共点a;
- 我们定义$H=\{y, q_N(a,y)=0\}$, 则$\Pi=a+H$;
- 对于$y\in H$, $t\in\mathbb{R}$, 定义$\varphi(t)=N(a+ty)$, 由范数的性质, 这是一个凸函数, 且满足$\varphi(t)\leqslant N(a)\sqrt{1+t^2q_N(y,y)}$;
- 由此, 我们得到φ的最小值在$t=0$时取到. 如果我们对于任意$x\in\mathbb{R}^3$, 定义(关于q_N的)向H的正交投影$\pi_H(x)$, 以及$\pi_a(x)=x-\pi_H(x)$, 那么就有$N(\pi_a(x))\leqslant N(x)$;
- 现在对于$\varepsilon,\delta\in(0,1)$定义

  $$q(x,x)=(1+\varepsilon)q_N(\pi_a(x),\pi_a(x))+(1-\delta)q_N(\pi_H(x),\pi_H(x)),$$

  我们有$q\in Q_+$, 且$I(q)=(1+\varepsilon)^{-1/2}(1-\delta)^{-1}I(q_N)$;
- 对于任意$x\in\mathbb{R}^3$, 有$q_N(\pi_a(x),\pi_a(x))+q_N(\pi_H(x),\pi_H(x)=q_N(x,x)\leqslant N^2(x)$, 故

  $$\begin{aligned}q(x,x)=&(1-\delta)(q_N(\pi_a(x),\pi_a(x))+q_N(\pi_H(x),\pi_H(x))+(\delta+\varepsilon)q_N(\pi_a(x),\pi_a(x))\\ \leqslant&N^2(x)-\left[\delta-\frac{\delta+\varepsilon}{N^2(a)}\right]N^2(x).\end{aligned}$$

- 如果$N^2(a)>3$, 那么可以取适当的$\varepsilon,\delta\in(0,1)$使得$\left[\delta-\dfrac{\delta+\varepsilon}{N^2(a)}\right]\geqslant 0$且$(1+\varepsilon)^{-1/2}(1-\delta)^{-1}<1$, 这意味着$I(q)<I(q_N)$, 矛盾.

因此$N^2(a)\leqslant 3$,即$E_0\subset\sqrt{3}V$.

上述(1)+(2)是二十世纪四十年代Fritz John证明的定理.

现在, 对于我们所考虑的凸多面体V, 这个定理告诉我们, 对于相应的椭球面E_0, 成立$\dfrac{1}{\sqrt{3}}E_0\subset V$. 这样, 由于凸体的表面积具有单调性(可以用关于凸体表面积的一般的Cauchy积分公式, 也可以利用这里只涉及一个光滑的椭球面和一个多面体来直接证明), 我们就有

$$\frac{1}{\sqrt{3}}E_0\text{的表面积}\leqslant V\text{的表面积},$$

从而

$$E_0\text{的表面积}\leqslant 3\times V\text{的表面积}.$$

说明: 这里的3当然(远)不是最优的.

问题6

(1) 假设有一枚硬币，投掷得到正面的概率为$1/3$。独立地投掷该硬币n次，记X_n为其中得到正面的次数。试求X_n为偶数的概率在n趋于无穷时的极限，即：

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \text{ 为偶数})$$

(2) 某人在过年期间参加了集五福活动，在这项活动中此人每扫描一次福字，可以随机地得到五张福卡中的一张。假设其每次扫福得到五福之一的概率固定，分别为$p_i \in (0,1),\ i=1,2,\cdots,5$ $(\sum_{i=1}^5 p_i = 1)$，并假设其每次扫描得到的结果相互独立。在进行了n次扫福之后，记$X_n^{(i)},\ i=1,2,\cdots,5$为其得到每种福卡的张数。试求以下极限

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{2n}^{(i)},\ i=1,2,\cdots,5 \text{ 全部为偶数})$$

[Note: 这一题目由2023年秋某次与北京市明诚外国语学校蔡桥老师讨论的题目改编而来。蔡老师虽然完全不知悉本比赛命题事宜，但对于本题有显著贡献]

答案6

1. 考虑按照第一次投掷的正反来进行分类：
   - 如果第一次投掷的结果为正面，则需要此后$n-1$次出现正面的总次数为奇数；
   - 反之，则需要此后$n-1$次出现正面的总次数为偶数。

   记$p_n = P(X_n \text{ 为偶数})$，根据全概率公式我们有

   $$p_n = \frac{1}{3}\times(1-p_{n-1}) + \frac{2}{3}\times p_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{p_{n-1}}{3}$$

   因此

   $$\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\times\left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

   成为一个压缩映射，故$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$。

2. 在第一问的基础上，令$p_n(q)$为正面概率为q时n次投掷得到偶数个正面的概率。通过与上一问相同的计算易见对于一切$q \neq \frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty} p_n(q) = \frac{1}{2}$。当$q=\frac{1}{2}$时，我们同理有

   $$p_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\times[1-p_{n-1}(\frac{1}{2})] + \frac{1}{2}\times p_{n-1}(\frac{1}{2}) \equiv \frac{1}{2}$$

   因此我们即得到了“只有两种不同福卡”情形下的概率极限。下面考虑三种不同福卡，其概率分别为p_1, p_2, p_3。注意到此时三种福卡各自的张数(X_1, X_2, X_3)服从参数

为$(2n, p_1, p_2, p_3)$的多项分布。1号福卡的张数X_1服从参数为$(2n, p_1)$的二项分布。此外，给定$X_1 = n_1$的前提下，X_2的条件分布服从参数为$(2n - n_1, \frac{p_2}{p_2+p_3})$的二项分布。

记我们关心的事件为$A_{2n}^{(3)}$"再次利用全概率公式，我们有

$$P(A_{2n}^{(3)}) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = 2k) p_{2n-2k}\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right) \tag{3}$$

注意到我们已经证明了$\lim_{m\to\infty} p_m\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right) = 1/2$。对于一切$\epsilon > 0$存在整数$M_1$使得

$$p_m\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right) \in (1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon),\ \forall m \geq 2M_1$$

同时，存在N_1使得

$$p_m(p_1) \in (1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon),\ \forall m \geq 2N_1$$

最后对于已确定的M_1，注意到X_1服从参数为$(2n, p_1)$的二项分布。使用切比雪夫不等式可知对上述$\epsilon > 0$存在N_2使得对任意$n \geq N_2$，有

$$P(X_1 \geq 2n - 2M_1) < \epsilon$$

令$N = \max\{N_1, N_2\}$，根据(3)有，对任意的$n \geq N$

$$\begin{aligned}
P(A_{2n}^{(3)}) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = 2k) p_{2n-2k}\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-M} P(X_1 = 2k) p_{2n-2k}\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right) + P(X_1 \geq 2n - 2M) \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \sum_{k=0}^{n-M} P(X_1 = 2k) + \epsilon \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) p_{2n}(p_1) + \epsilon \leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)^2 + \epsilon
\end{aligned}$$

与此同时，

$$\begin{aligned}
P(A_{2n}^{(3)}) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = 2k) p_{2n-2k}\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right) \\
&\geq \sum_{k=0}^{n-M} P(X_1 = 2k) p_{2n-2k}\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \sum_{k=0}^{n-M} P(X_1 = 2k) \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \left[p_{2n}(p_1) - P(X_1 \geq 2n - 2M)\right] \geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon\right)
\end{aligned}$$

由ϵ的任意性，易见$P(A_{2n}^{(3)}) \to 1/4$。因此，我们即可以递归地证明$P(A_{2n}^{(5)}) \to 2^{-4}$，证毕。 $\square$

问题7

有这么一个音乐盒，它上面有一个圆形的轨道，轨道上的一点处还有一棵开花的树。当音乐盒处于开启模式时，音乐盒会发出音乐，轨道会按照顺时针匀速转动。

你可以在轨道上放置象征恋人的两颗棋子，我们不妨称它们为小红和小绿。当小红和小绿没有到达树下时，它们就会在轨道上各自移动。当某一颗棋子到达树下时，它就会在树下原地等待一段时间。此段时间内，如果另外一颗棋子也达到了树下，那么两颗棋子就会相遇，之后在它们将随即一起顺着轨道移动，不再分开；否则，等待时间结束，两颗棋子将各自顺着轨道继续移动。

考虑这个音乐盒的数学模型。我们把这个圆形轨道参数化成一个周长为1 的圆环，我们认为棋子和树都可以用圆环上点表示。具体来说，我们用$X(t) \in [0,1]$ 和$Y(t) \in [0,1]$ 分别表示t时刻小红和小绿的在轨道上的位置坐标，而树的坐标是$\phi = 1$，或者，等价地，$\phi = 0$。

当他们都没有抵达树下时（见左图），他们的位置变化规律满足

$$\frac{d}{dt}X(t) = 1, \quad \frac{d}{dt}Y(t) = 1.$$

假设在t_0 时刻，小绿到达了树下（见中图），即$Y(t_0) = 1$，它就会至多等待

$$\tau = K(X(t_0))$$

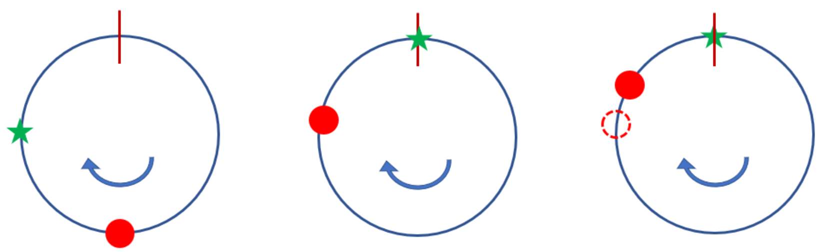
的时间，换句话说，最长等待时间依赖于小红的当时的位置。

在等待期间，小绿不动，小红继续移动。如果等待期间的某时刻$t^* \in (t_0, t_0 + \tau]$，小红也达到了树下，即$X(t^*) = 1$，那么两棋子相遇。如果等待时间结束时（见右图），小红仍没有到达树下，那么它们俩继续移动，此时他们的位置分别是

$$X(t_0 + \tau) = X(t_0) + \tau, \quad Y(t_0 + \tau) = 0.$$

注意，虽然小绿的坐标被重置了，但是它在圆环上的位置并没有变。

如果在某时刻小红到达树下，它也会按照相同的规则等待，最长等待时间取决于此时小绿的位置。显然，小红小绿的命运取决于最长等待时间函数$K(\phi)$ 的形式。



(1) 我们设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数，满足

$$f'>0,\quad f''<0,\quad f(0)=0,\quad f(1)=1.$$

并设ε 是一个充分小的正的常数。我们定义等待时间函数

$$K(\phi)=f^{-1}\big(f(\phi)+\epsilon\big)-\phi.$$

证明除了唯一的例外（特定的初始距离）之外，无论小红和小绿的初始距离如何，他们最终会相遇的。

(2) 我们考虑一个如下形式的f 函数

$$f(\phi)=\frac{1}{b}\ln\Big(1+(e^b-1)\phi\Big),$$

这里$b>0$ 是一个常数。当$b\ll 1,\ \varepsilon\ll 1$ 时，请估算出相遇之前小红小绿走过的圈数的数量级。

答案7

(1) 我们不妨考虑从小绿结束等待开始考虑。设此时小红的坐标为ϕ，二者的坐标从小到大排列为$(0,\phi)$。

那么经过$1-\phi$ 的时间，小红达到树下，二者坐标变成$(1-\phi,1)$。那么小红的等待时间为$\tau=K(1-\phi)$。

当$1-\phi+K(1-\phi)\geq 1$ 时，小红和小绿在这次等待中相遇。

当$1-\phi+K(1-\phi)<1$ 时，小绿并没有在小红等待期间达到树下，此时二者坐标变成$(1-\phi+K(1-\phi),0)$。如果按照从小到大从新排列，二者的坐标变成了$(0,1-\phi+K(1-\phi))$，即$(0,f^{-1}(f(1-\phi)+\epsilon))$。

我们定义

$$h(\phi)=f^{-1}(f(1-\phi)+\epsilon),\quad H(\phi)=h(h(\phi)).$$

假设小红和小绿一直没有相遇，我们在每一次某个棋子刚结束等待时来从小到大观察二者的坐标，那么如果第n 次观察时的二者坐标为$(0,\phi)$，则第$n+1$ 次观察时的二者坐标为$(0,h(\phi))$，第$n+2$ 次观察时的二者坐标为$(0,H(\phi))$。注意，每隔两次观察，正好是同一颗棋子在树下。

我们先来研究$h(\phi)$ 函数。为了保证一次观察后没有相遇，我们需要$1-\phi+K(1-\phi)<1$。易知，$h(\phi)$ 的定义域为$(\delta,1)$，其中$\delta=1-f^{-1}(1-\varepsilon)$。

我们求导得，

$$h'(\phi)=-(f^{-1})'(f(1-\phi)+\varepsilon)f'(1-\phi).$$

再根据反函数求导法则知

$$(f^{-1})'(f(1-\phi)+\varepsilon)=\frac{1}{f'(f^{-1}(f(1-\phi)+\varepsilon))}.$$

注意到，$f^{-1}(f(1-\phi)+\varepsilon)>1-\phi$，那么再由$f$ 的凹性，我们有

$$h'(\phi)=-\frac{f'(1-\phi)}{f'(f^{-1}(f(1-\phi)+\varepsilon))}<-1.$$

然后我们研究$H(\phi)$ 函数，如果两次观察后没有相遇，那么易知H 的定义域为$(\delta,h^{-1}(\delta))$。显然当ε 充分小时，这个定义域非空。

求导得，$H'(\phi)=h'(h(\phi))h'(\phi)$，于是我们有$H'>1$。

下面我们研究H 的不动点和稳定性。首先易知$h(\phi)$ 在$(\delta,h^{-1}(\delta))$ 上有唯一的不动点，设为ϕ^*. 那么自然也有$H(\phi^*)=\phi^*$。再由$H'>1$，我们容易得出

$$H(\phi)>\phi,\quad \text{when}\quad \phi>\phi^*;\qquad H(\phi)<\phi,\quad \text{when}\quad \phi<\phi^*;$$

即H 有唯一的不稳定平衡点。

所以除非两个棋子初始时的坐标差距是ϕ^*，两个棋子一定会相遇。

(2) 如果我们令$g=f^{-1}$，那么易得

$$g(z)=\frac{e^{bz}-1}{e^b-1}.$$

我们可以直接计算得到

$$h'(\phi)=-\frac{g'(f(1-\phi)+\varepsilon)}{g'(f(1-\phi))}=-e^{b\varepsilon}.$$

于是我们得到$H'(\phi)=e^{2b\varepsilon}$，即$H$ 是线性函数。那么再由$H(\phi^*)=\phi^*$ 我们得到

$$H(\phi)=e^{2b\varepsilon}(\phi-\phi^*)+\phi^*.$$

如果我们记

$$\phi_k=H^k(\phi_0),\quad \Delta_0=|\phi_0-\phi^*|,\quad \Delta_k=|\phi_k-\phi_*|$$

那么，可以直接算出

$$\Delta_k=e^{2b\varepsilon k}\Delta_0.$$

注意到，第$2k$ 次观察时，每个棋子转过的圈数是k，且当$\Delta_k=O(1)$ 时，就会发生两个棋子相遇，于是推算出相遇时

$$k=O\left(\frac{1}{b\varepsilon}\ln\frac{1}{\Delta_0}\right).$$

相遇时，棋子走过的圈数也是$O\left(\frac{1}{b\varepsilon}\ln\frac{1}{\Delta_0}\right)$。